

# Простая задача

Автор задачи и разработчик: Алексей Васильев

Изначально посчитаем вспомогательный массив  $closest_{v,b}$  — расстояние до ближайшей вершины к  $v$ , число в который содержит единичный бит  $b$  ( $0 \leq b < k$ ). Решим это независимо по битам. Когда мы хотим посчитать  $closest$  для какого-то конкретного бита, то запустим multisource bfs из всех вершин, которые содержат этот единичный бит. Либо можно сделать это с помощью динамики по поддеревьям. Асимптотика этой части  $O(nk)$ .

Пусть мы знаем ответное множество  $A$ , зафиксируем в нем вершины на максимальном расстоянии. Пусть это вершины  $a$  и  $b$ . Назовем путь между этими вершинами диаметром, а длиной этого диаметра — количество ребер в нем (обозначим длину как  $d$ ).

Разберем два случая:

1. Пусть длина диаметра четная. Пусть вершина  $m$  — середина диаметра. Тогда все вершины из  $A$  находятся на расстоянии не больше  $\frac{d}{2}$  от  $m$  (если это не так, то можно показать, что мы взяли неправильный диаметр). Это значит, что от того, что мы возьмем в ответное множество все вершины на расстоянии не больше  $\frac{d}{2}$  от  $m$ , то нам хуже не станет (то есть множество не уменьшится и стоимость этого множества останется прежней).

Обработаем этот случай следующим образом. Зафиксируем вершину  $m$ . Теперь мы хотим найти минимальное  $x$ , что если набрать в ответное множество все вершины на расстоянии не более  $x$  от  $m$ , то у них будет нужное нам значение ИЛИ. Утверждается, что  $x$  — это максимальное значение  $closest_{m,b}$  по всем битам  $b$ . Таким образом мы находим это  $x$  и релаксируем ответ через  $2x$  (потому что  $x$  — это  $\frac{d}{2}$ ).

2. Пусть длина диаметра нечетная. Тогда у него посередине не вершина, а ребро. Пусть вершины ребра посередине — это  $m_1$  и  $m_2$ . Тогда аналогично прошлому пункту, мы говорим, что все вершины множества  $A$  находятся на расстоянии не более  $\frac{d-1}{2}$  от вершины  $m_1$  или от вершины  $m_2$ . И от того, что мы возьмем в ответное множество все вершины на расстоянии не более  $\frac{d-1}{2}$  от  $m_1$  или  $m_2$ , нам хуже не станет.

Поэтому аналогично прошлому пункту — перебираем ребро  $m_1, m_2$ . Дальше хотим найти минимальное  $x$ , такое что, если набрать в ответное множество все вершины на расстоянии не более  $x$  от  $m_1$  или  $m_2$ , то у них будет нужное нам значение ИЛИ. Утверждается, что  $x$  — это максимальное значение  $\min(closest_{m_1,b}, closest_{m_2,b})$ . Находим это  $x$  и релаксируем ответ через  $2x + 1$  (потому что  $x$  — это  $\frac{d-1}{2}$ ).

Можно еще не думать отдельно про второй случай следующим образом: добавим посередине каждого ребра фиктивную вершину с значением 0 и будем решать на таком новом дереве. После такой модификации дерева центром ответного диаметра всегда будет вершина, поэтому можно думать только про первый случай.

Асимптотика второй части  $O(nk)$ , потому что мы перебрали  $O(n)$  кандидатов на центр диаметра и для каждого вычислили  $x$  за  $O(k)$ .