

# Украшение

Автор задачи: Алексей Михненко

Разработчик задачи: Виктор Романенко

## Формальная постановка задачи

Дано  $n$  отрезков на прямой. Разрешена следующая операция: выбрать два отрезка  $(l_i, r_i)$  и  $(l_j, r_j)$  и произвольным образом составить два новых отрезка из их четырёх границ.

Дано  $q$  запросов  $k_i$ . Для каждого запроса требуется определить минимальное количество операций, необходимых для того, чтобы существовало подмножество из  $k_i$  попарно пересекающихся отрезков.

## Основная идея

Пусть все отрезки искомого множества пересекаются в некоторой точке  $x$ . Предположим, что:

- $c$  — число отрезков, уже покрывающих точку  $x$ ,
- $l$  — число отрезков, расположенных строго левее  $x$ ,
- $r$  — число отрезков, расположенных строго правее  $x$ .

Заметим, что одной операцией можно взять один левый и один правый отрезок и перестроить их так, чтобы оба пересекали точку  $x$ . Следовательно, за одну операцию можно увеличить число отрезков, пересекающих  $x$ , на два.

Таким образом, максимальное количество отрезков, которые можно сделать пересекающимися в точке  $x$ , равно

$$c + 2 \cdot \min(l, r).$$

Для достижения этого значения потребуется  $\min(l, r)$  операций. Если требуется получить промежуточное количество  $k_i$ , то достаточно выполнить

$$\left\lceil \frac{k_i - c}{2} \right\rceil$$

операций.

## Подгруппа 3. Отрезки не пересекаются

В этом случае для любой точки выполняется  $c \leq 1$ . Поэтому удобно рассматривать точку внутри центрального отрезка.

Для любой точки внутри такого отрезка выполняется  $c = 1$ , следовательно ответ для любого  $k_i$  вычисляется по формуле

$$\left\lceil \frac{k_i - 1}{2} \right\rceil.$$

Если число отрезков чётное и  $k_i = n$ , то точка пересечения должна находиться между двумя центральными отрезками, где  $c = 0$ . Тогда ответ равен  $n/2$ . Поскольку  $n$  чётно, это значение эквивалентно формуле выше.

## Подгруппа 4. $k_i = n$

Если требуется сделать пересекающимися все отрезки, точка ответа должна находиться в позиции, где количество отрезков строго слева и строго справа одинаково.

Такую точку можно найти с помощью сканлайна. После нахождения соответствующих значений  $c$ ,  $l$  и  $r$  ответ вычисляется по приведённой ранее формуле.

## Решение подгрупп 1, 2, 4, 5

Выполним сканлайн. Для каждой открывающей границы отрезка и каждой закрывающей границы будем фиксировать значения:

- $c$  — количество отрезков, покрывающих текущую точку,
- $\min(l, r)$  — минимальное число отрезков строго слева и строго справа.

При обработке закрывающей границы соответствующий отрезок уже не учитывается в  $c$ , однако считается лежащим строго слева, поскольку точка пересечения может находиться вне его границ.

Для каждой такой позиции можно вычислить минимальное число операций по формуле

$$\left\lceil \frac{k_i - c}{2} \right\rceil,$$

при условии, что

$$k_i \leq c + 2 \cdot \min(l, r).$$

Минимум по всем таким позициям даёт ответ для подгрупп 1, 2, 4 и 5.

### Полное решение

Остаётся оптимизировать вычисление ответов.

Для каждого  $k$  от 1 до  $n$  заранее вычислим максимальное значение  $c$ , такое что возможно получить  $k$  пересекающихся отрезков. Обозначим эту величину через  $best[k]$ .

Во время сканлайна для каждой позиции вычисляется значение

$$c + 2 \cdot \min(l, r),$$

которое показывает максимальное число отрезков, пересекающихся в данной точке после операций. Тогда выполняем обновление

$$best[c + 2 \cdot \min(l, r)] = c.$$

После завершения сканлайна пройдемся по массиву  $best$  справа налево и распространим максимум:

$$best[i] = \max(best[i], best[i + 1]).$$

Теперь  $best[k]$  содержит максимальное число отрезков, уже покрывающих точку, из которой можно получить  $k$  пересекающихся отрезков.

Ответ на запрос  $k_i$  вычисляется по формуле

$$\left\lceil \frac{k_i - best[k_i]}{2} \right\rceil.$$

Итого  $O(n \log n)$  на предсчет из-за сортировки и  $O(1)$  на запрос