

# Украсяване

## Формална постановка на задачата

Дадени са  $n$  отсечки на права. Разрешена е следната операция: да се изберат две отсечки  $(l_i, r_i)$  и  $(l_j, r_j)$  и произволно да се съставят две нови отсечки от техните четири граници.

Дадени са  $q$  запитвания  $k_i$ . За всяко запитване е необходимо да се определи минималният брой операции, необходими, за да съществува подмножество от  $k_i$  попарно пресичащи се отсечки.

## Основна идея

Нека всички отсечки от търсеното множество пресичат в някоя точка  $x$ . Да предположим, че:

- $c$  — броят на отсечките, които вече покриват точка  $x$ ,
- $l$  — броят на отсечките, разположени строго вляво от  $x$ ,
- $r$  — броят на отсечките, разположени строго вдясно от  $x$ .

Забелязваме, че с една операция можем да вземем една лява и една дясна отсечка и да ги реконструираме така, че и двете да пресичат точка  $x$ . Следователно, с една операция можем да увеличим броя на отсечките, пресичащи  $x$ , с два.

Така максималният брой отсечки, които могат да бъдат направени пресичащи се в точка  $x$ , е равен на

$$c + 2 \cdot \min(l, r).$$

За да се достигне до тази стойност, ще са необходими  $\min(l, r)$  операции. Ако е необходимо да се получи междинно количество  $k_i$ , то е достатъчно да се извършат

$$\left\lceil \frac{k_i - c}{2} \right\rceil$$

операции.

## Подгрупа 3. Отсечките не се пресичат

В този случай за всяка точка важи  $c \leq 1$ . Затова е удобно да се разглежда точка вътре в централната отсечка.

За всяка точка вътре в такава отсечка важи  $c = 1$ , следователно отговорът за всяко  $k_i$  се изчислява по формулата

$$\left\lceil \frac{k_i - 1}{2} \right\rceil.$$

Ако броят на отсечките е четен и  $k_i = n$ , то точката на пресичане трябва да се намира между двете централни отсечки, където  $c = 0$ . Тогава отговорът е равен на  $n/2$ . Тъй като  $n$  е четно, тази стойност е еквивалентна на горната формула.

## Подгрупа 4. $k_i = n$

Ако е необходимо да се направят пресичащи се всички отсечки, точката на отговора трябва да се намира в позиция, където броят на отсечките строго вляво и строго вдясно е равен.

Такава точка може да се намери с помощта на сканираща линия. След намирането на съответните стойности  $c$ ,  $l$  и  $r$ , отговорът се изчислява по предходната формула.

## Решение на подгрупи 1, 2, 4, 5

Извършваме сканираща линия. За всяка отваряща граница на отсечка и всяка затваряща граница ще фиксираме стойностите:

- $c$  — броят на отсечките, покриващи текущата точка,

- $\min(l, r)$  — минималният брой отсечки строго вляво и строго вдясно.

При обработка на затварящата граница, съответната отсечка вече не се взема предвид в  $c$ , но се счита, че е разположена строго вляво, тъй като точката на пресичане може да се намира извън нейните граници.

За всяка такава позиция може да се изчисли минималният брой операции по формулата

$$\left\lceil \frac{k_i - c}{2} \right\rceil,$$

при условие, че

$$k_i \leq c + 2 \cdot \min(l, r).$$

Минимумът по всички такива позиции дава отговор за подгрупи 1, 2, 4 и 5.

### Пълно решение

Остава да оптимизираме изчислението на отговорите.

За всяко  $k$  от 1 до  $n$  предварително изчисляваме максималната стойност  $c$ , така че да е възможно да се получат  $k$  пресичащи се отсечки. Нека обозначим тази величина с  $best[k]$ .

По време на сканиращата линия за всяка позиция се изчислява стойността

$$c + 2 \cdot \min(l, r),$$

която показва максималния брой отсечки, пресичащи се в дадената точка след операциите. Тогава извършваме обновление

$$best[c + 2 \cdot \min(l, r)] = c.$$

След завършване на сканиращата линия, ще преминем през масива  $best$  отдясно наляво и ще разпространим максимума:

$$best[i] = \max(best[i], best[i + 1]).$$

Сега  $best[k]$  съдържа максималния брой отсечки, които вече покриват точка, от която може да се получат  $k$  пресичащи се отсечки.

Отговорът на запитване  $k_i$  се изчислява по формулата

$$\left\lceil \frac{k_i - best[k_i]}{2} \right\rceil.$$

И така,  $O(n \log n)$  за предварителното изчисление поради сортиране и  $O(1)$  за запитване