Марш овец

Автор задачи: Александр Бабин
Разработчик задачи: Юрий Федоров

1 $T = 2$

Заметим, что каждую секунду четность позиции каждой овцы меняется. Поэтому, если существует две овцы с разной четностью позиции, то ответ, очевидно `No`, так как всегда будет овца как на четной, так и нечетной позиции. В противном случае утверждается, что ответ всегда существует. Например, существует следующий алгоритм:

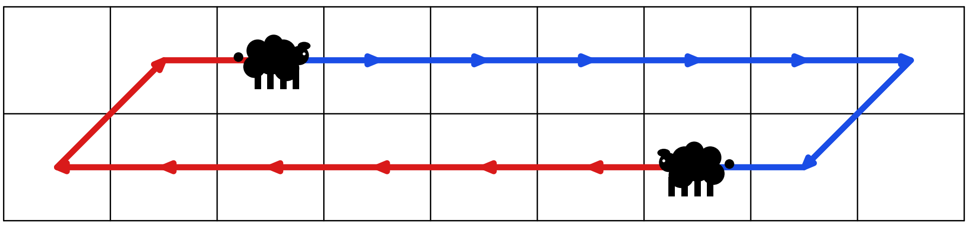
Если у текущего последнего столбца четность не совпадает с четностью позиций овец, то всегда можно обрезать участок на 1 (так как на последнем столбце гарантированно не может быть овцы, ввиду четности). Таким образом можно достичь количества столбцов равному 1, где все овцы гарантированно двигаются одинаково.

2 $n \leqslant 3, m \leqslant 4$

Если решить $T = 1$, то оставшихся случаев очень мало и их можно рассмотреть руками, либо же можно сделать перебор. В качестве состояния можно взять позиции каждой из овец, а также длину участка. И тогда есть два вида переходов: мы симмулируем одну секунду, либо же уменьшаем участок. Что можно реализовать при помощи любого графового алгоритма. Также существуют другие переборы.

3 $n = 2$

В случае $a_1 = 1, a_2 = m$ можно порисовать и понять, что ответ равен $\frac{m+1}{2}$, и достаточно обрезать до этого размера через это же время.



Теперь давайте посмотрим на два расстояния, отмеченных синим и красным цветом. Это расстояние от первой овцы до второй, и от второй до первой в порядке их пути. Тогда заметим, два факта:

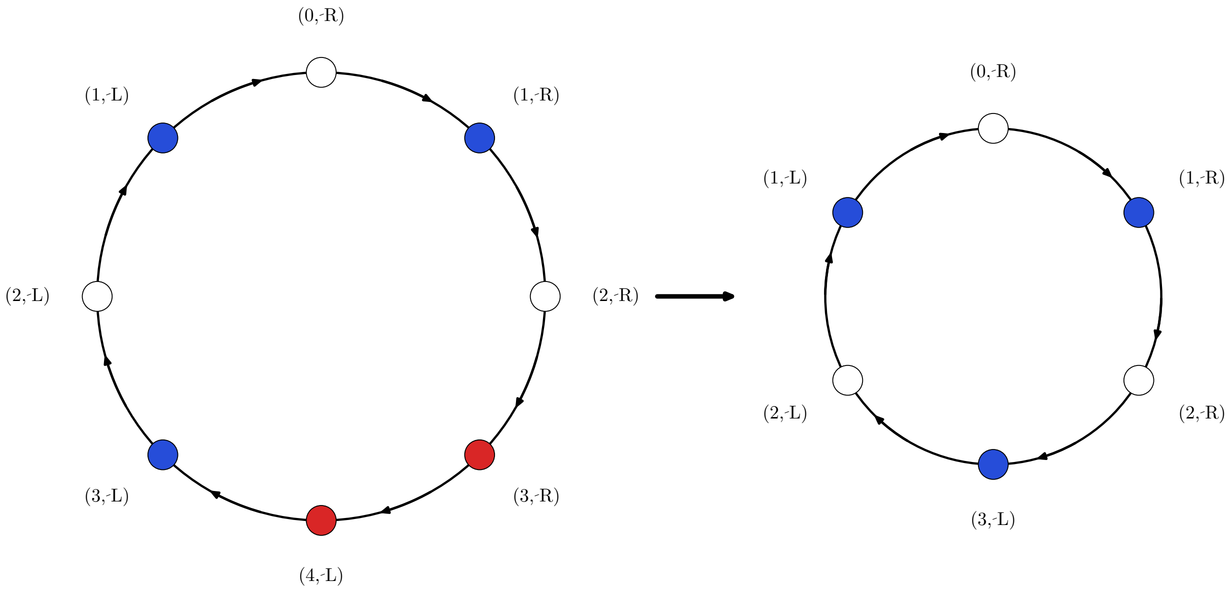
1. Овцы будут двигаться одиннаково, тогда и только тогда, когда расстояние от одной до другой будет равно строго нулю.
2. После уменьшения размера поля на 1, одно из этих расстояний уменьшается на 2.

Из чего сразу следует решение за $O(m)$: мы можем симмулировать их движение, и если обрезание уменьшает наименьшее из расстояний, то мы будет обрезать участок на 1. И за $4 \cdot m$ операций этот процесс гарантированно будет завершен.

Теперь же научимся решать за $O(1)$: заметим, что если мы оставляем максимальное из расстояний, то если эта длина равна x, то ответ будет равен $\frac{x}{2} + 1$, так как если мы оставили длину x, то расстояние от одной овцы до другой будет равно $2 \cdot x - 2$. Тонкости же восстановления ответа, будут рассмотрены в полном решении.

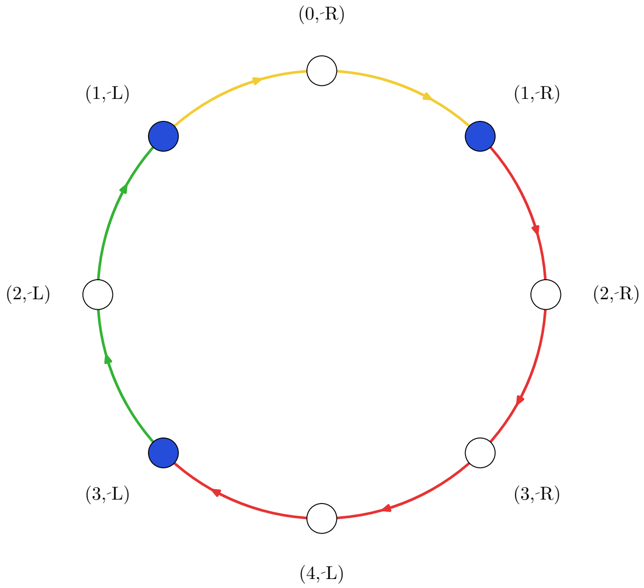
4 $T = 2$

Немного разовьем идеи из $n = 2$. Заметим, что участок можно представить в виде цикла длины $2 \cdot m - 2$. А уменьшение длины участка на 1 — это уменьшение длины цикла на 2:



На этой картинке приведен пример, где 3 овцы находятся в позициях $(2, 4, 2)$, их направления движения `RLL` (то есть синие точки — это овцы). А для удобства дальнейшего повествования позиции перенесены в 0 индексации. Красными вершинами помечены те, которые удаляются после уменьшения цикла.

Тогда расстояния до соседних овец можно представить в виде количества дуг от овцы до следующей по ней по циклу (здесь разными цветами обозначены различные дуги, которые представляют собой расстояния до соседних овец):



Тогда заметим, что конструкция никак принципиально не отличается от ситуации $n = 2$. Нас также интересует только максимальное расстояние между соседними овцами на цикле. И можно, как и версии $n = 2, m \leqslant 2 \cdot 10^5$ просимулировать движения и обрезать в моменты, когда текущая длина не является максимумом, в этом случае получается асимптотика $O(n \cdot m)$. Либо же сказать, что ответ равен $\frac{x}{2} + 1$, где x — максимальное расстояние между соседними овцами.

5 Полное решение

Осталось только научиться восстанавливать. В случае $n, m \leqslant 1000$ мы уже научились решать, поэтому осталось научиться восстанавливать при полных ограничениях.

Давайте отсортируем всех овец по расположению по циклу. И пусть i — это позиция овцы такая, что дуга от овцы i до следующей овцы по циклу максимальное. Тогда восстановить можно следующим образом:

- Перенумеруем массив таким образом, чтобы овца под номером i оказалась самой последней овцой.
- Давайте подождем время, чтобы последняя овца оказалась на позиции $m - 1$ на круге в 0 индексации (или другими словами, чтобы она стояла в последнем столбце).
- Тогда чтобы обрезать дугу от овцы $n - 1$ до овцы n, достаточно будет «прокрутить» цикл, чтобы овцы стала на позицию $m - 1 + \frac{d}{2}$, где d — длина дуги от овцы $n - 1$ до овцы n. А затем уменьшить длину участка на $\frac{d}{2}$, после чего овца под номером будет n будет стоять на позиции $m - 1$ в цикле.
- После этого мы можем игнорировать овцу под номером n и обрабатывать овцу под номером $n - 1$ и так далее.

Ну и несложно заметить, что это действительно удалит все дуги, кроме максимальной.